Ejercicio Capitulo 29 del Curso de Teoría Cuántica de Campos

Se trata de hallar σ_p para un estado coherente α

Como $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$ debemos calcular ambos términos del radicando
Puesto que $\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger)$, tendremos

$\langle p\rangle = \langle \alpha \mid p \mid \alpha\rangle = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left[\langle \alpha \mid a \mid \alpha\rangle - \langle \alpha \mid a^\dagger \mid \alpha\rangle\right] = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\alpha - \alpha^*)$
Se ha hecho uso de las relaciones
$a \mid \alpha\rangle = \alpha \mid \alpha\rangle$ y
$\langle \alpha \mid a^\dagger = (a \mid \alpha\rangle)^\dagger = (\alpha \mid \alpha\rangle\ )^\dagger = \alpha^*\ \langle \alpha \mid$

Asi que
$\langle p\rangle^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha - \alpha^*)^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2 - 2\alpha\alpha^* + \alpha^{*2})$

$$\langle p\rangle^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2 - 2 \mid \alpha \mid^2 + \alpha^{*2})$$

Calculamos ahora $\langle p^2\rangle$
$\hat{p}^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(a - a^\dagger)^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + a^{\dagger 2})$
$\hat{p}^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^2 - (1 + a^\dagger a) - a^\dagger a + a^{\dagger 2})$
$\hat{p}^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^2 - 1 - 2\hat{N} + a^{\dagger 2})$

Haciendo ahora
$\langle p^2\rangle = \langle \alpha \mid p^2 \mid \alpha\rangle = \langle \alpha \mid -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^2 - 1 - 2\hat{N} + a^{\dagger 2}) \mid \alpha\rangle$

$$\langle p^2\rangle = -\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2 - 1 - 2 \mid \alpha \mid^2 + \alpha^{*2})$$

en donde se han vuelto a emplear las mismas relaciones de antes y el resultado ya conocido de
$\langle \alpha \mid \hat{N} \mid \alpha\rangle = \mid \alpha \mid^2$
Juntando ambos resultados tendremos
$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$
$\sigma_p = \sqrt{-\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2 - 1 - 2 \mid \alpha \mid^2 + \alpha^{*2}) - \left[-\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2 - 2 \mid \alpha \mid^2 + \alpha^{*2})\right]}$
$\sigma_p = \sqrt{-\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2 - 1 - 2 \mid \alpha \mid^2 + \alpha^{*2}) + \frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2 - 2 \mid \alpha \mid^2 + \alpha^{*2})}$
Simplificando

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}$$